UNIVERSIDAD CATOLICA
DE LA SANTISIMA CONCEPCION

VII COLOQUIO DE DOCENCIA UNIVERSITARIA

LA REFLEXIÓN COMO CATALIZADOR DE CAMBIO EN LAS METODOLOGÍAS DE AULA

12 NOV.2014

Dirección de Docencia

UNIVERSIDAD CATOLICA
DE LA SANTISIMA CONCEPCION

VII COLOQUIO DE DOCENCIA UNIVERSITARIA

ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL CONCEPTO LÍMITE: UNA COMPARACIÓN DE LA EVOLUCIÓN HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICA Y EL CURRÍCULO DE PRIMER AÑO DE INGENIERÍA EN LA UNICIT, UCSC -CHILE

Eduardo Orellana

"… el docente en su clase, el que elabora los programas, el que hace los manuales cada uno en su ámbito instituyen una norma que tiende a constituir un objeto de enseñanza como distinto al objeto del saber al que da lugar…"

(Chevallard, 1978, pp. 4-5)

Se presentan las conclusiones obtenidas al realizar la comparación Histórica-Epistemológica y currículo de Ingeniería, para así determinar los conceptos y procesos matemáticos de la investigación.

El trabajo de investigación considera dos partes:

- De tipo indagatoria a través de la historia y epistemología del concepto límite (evolución del concepto desde su forma más intuitiva a su formalidad) y el currículo

- Describir los principales errores y dificultades que los estudiantes de primer año de ingeniera de la Unicit – UCSC, mediante la comparación de la evolución del concepto y el currículo:

I. D.

La comparación obtenida nos permite describir y analizar las principales variables que son necesarias para la construcción del concepto de límite y su inserción en el currículo.

Los trabajos más relevantes:

- Cornu(1991) y Sierpinska (1985)
- Dubinsky y Tall (1991).

Se resalta: ausencia de Métodos y el pobre uso de la Historia y epistemología en la construcción del concepto

UNIVERSIDAD CATOLICA
DE LA SANTISIMA CONCEPCION

VII COLOQUIO DE DOCENCIA UNIVERSITARIA
Dirección de Docencia

HISTORIA Y EPISTEMOLOGÍA DEL CONCEPTO LÍMITE

La primera parte fue separada en cuatro períodos que datan desde los primeros indicios del concepto en la Grecia antigua hasta su formalización en el siglo XX

De la Grecia Antigua

PARADOJAS
PRECEDENTE EN EL INFINITO
EXHAUSCIÓN
UNICIDAD

MÉTODOS
INFINITÉSIMOS
SISTEMAS
LÓGICOS

Del siglo XVIII

DIFERENC
GEOMETRÍA
VARIABLES
FUNCIONES

EXISTENCIA DEL LÍMITE
LÍMITE UNILATERAL
DERIVADA COMO LÍMITE
APLICACIÓN AL ENTORNO

Del siglo XIX

• Esencia Teórica
• Teoría de la variable real
• Métodos analíticos nuevos

PENSAMIENTO MATEMÁTICO
PENSAMIENTO FILOSÓFICO

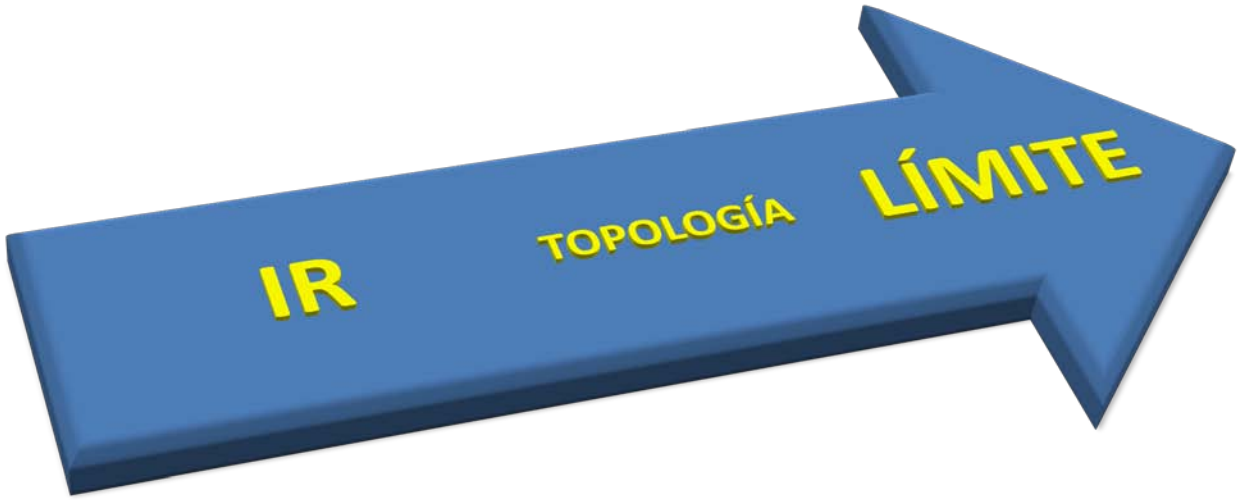
Del siglo XX

MÉTODOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS
TEORÍA DE LAS FUNCIONES REALES

RIGUROSIDAD

EXISTENCIA

TRANSVERSALIDAD


IR
TOPOLOGÍA
LÍMITE

UNIVERSIDAD CATOLICA
DE LA SANTISIMA CONCEPCION

VII COLOQUIO DE DOCENCIA UNIVERSITARIA
Dirección de Docencia

EL CONCEPTO DENTRO DEL CURRÍCULO DE INGENIERÍA

UNICIT

- *Análisis de los programas de Cálculo*

UCSC

- Revisión programa Cálculo I

Objetivo

Establecer el concepto de límite de una función y sus propiedades.

Material de apoyo

Límites de Funciones

Límites de funciones reales.

Límites de funciones y operatoria.

Las funciones circulares.

Existencia de asíntotas.

Límites y continuidad de las *f*

Límites y continuidad de las funciones trigonométricas

ESTRACTO DE PROGRAMAS COMUNES 2007 - 2013

UNIVERSIDAD CATOLICA
DE LA SANTISIMA CONCEPCION

VII COLOQUIO DE DOCENCIA UNIVERSITARIA
Dirección de Docencia

Comparación entre la historia y epistemología del concepto límite y el currículo de 1 año de Ingeniería

CURRICULO Y EL CONCEPTO	EPISTEMOLOGÍA DEL CONCEPTO
no se utiliza el método de exhaucción para casos directos de límites	uso general del método de exhaución con la demostración por reducción al absurdo
desarrollo algorítmico del concepto	desarrollo epistemológico del concepto límite
ausencia de demostración de la unicidad del límite	demostración de la propiedad de la unicidad del límite
no muestra claridad respecto a la iniciación del concepto de límite	existen verdades infinitésimas que reemplazan el concepto
Ausencia de conceptos topológicos	Conjunto IR, vecindad, entorno, recubrimiento, espacios, compactos , Teorema de Heinri-Borel, de Cauchy, Hilbert, …

CURRICULO Y EL CONCEPTO	HISTORIA Y EL CONCEPTO
ausencia completa de paradojas	uso de las paradojas para buscar soluciones perfectas a problemas con la idea intuitiva de LIM
Ausencia de las ciencias naturales en el desarrollo del concepto	influencia de las ciencias naturales en el desarrollo del concepto límite
fuerte presencia de resolución algorítmica	el concepto está alejado de tener una resolución algorítmica
se presenta el concepto en torno a las funciones	Gira alrededor de las magnitudes variables y las funciones

EN AMBOS CASOS SE ENCONTRÓ:

Departamento de Matemática y Física Aplicadas - UCSC 2012
Cálculo I (IN1002C)

UNIVERSIDAD CATOLICA DE LA SANTISIMA CONCEPCION
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y FISICA APLICADAS

Listado 3: Límite y continuidad de funciones reales

Cálculo I - IN1002C

Primer Semestre de 2012

Definición de límite

1. Usando la definición muestra los siguientes límites:

1.1) $\lim_{x\to 1} 2x+5=7$ 1.2) $\lim_{x\to 4}\sqrt{x}=2$ 1.3) $\lim_{x\to 2} x^2=4$ 1.4) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{3}$

Limites de funciones

2. Calcular los siguientes límites

2.1) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{3x+1}$

2.2) $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\sqrt{4x+2}$

2.3) $\lim_{x\to 2}\sqrt{1-x}$

2.4) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-9x}{x^2+x-12}$

2.5) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-9x}{x^2+x-12}$

2.6) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^3-9x}}{\sqrt[3]{x^2+x-2}}$

2.7) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2}{x^2}-\frac{1}{x}$

2.8) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{4}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

2.9) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x-1}}$

2.10) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x-1}-1}$

2.11) $\lim_{x\to -4}\frac{x^6-4096}{x+4}$

2.12) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$

2.13) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{\sqrt{4-x^2}-\sqrt{4-2x}}$

2.14) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

2.15) $\lim_{x\to 2}\frac{x+\sqrt{2x^4-7x^2}}{2x+\sqrt{18+x}}$

2.16) $\lim_{x\to 5}\frac{25-x^2}{x-\sqrt{x^2+x-5}}$

2.17) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{1-\sqrt{x}}$

2.18) $\lim_{x\to\sqrt[3]{2}}\frac{x^3-2}{x-\sqrt[3]{2}}$

2.19) $\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{3}{4}}-2x^{\frac{1}{4}}+1}{(x-1)^2}$

2.20) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

2.21) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-1}{x}$

2.22) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

2.23) $\lim_{x\to 3}\frac{\frac{2}{\sqrt{x+1}}-1}{x-3}$

Límites al Infinito

3. Calcular los siguientes límites al infinito

3.1) $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x+2}-x)$

3.2) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x^2-8x+5}$

3.3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{2+x}\right)^{\frac{x}{2}}$

3.4) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

3.5) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x(x+2)}-x$

3.6) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+4}{\sqrt{x^4-1}}$

3.7) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}$

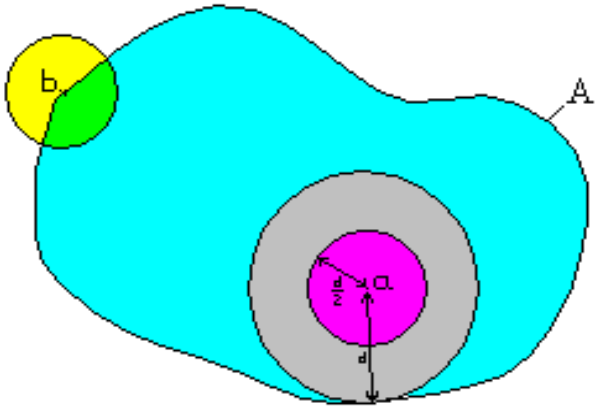
3.8) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4+2x}{3x+1}\right)^{x+1}$

3.9) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x+4}}{x+2}$

Asintotas

4. Encontrar asintotas verticales, horizontales y oblicuas de las siguientes funciones

El análisis presenta sus formas:



Vom folosi Teorema de reprezentare Riesz pentru a arăta că orice măsură Borel pozitivă, finită local pe R este o măsură Radon (implicaţia inversă reiese din definiţie)

Lemă.

Dacă μ *este o măsură Radon* σ*-finită şi* $E \in B_\sigma$ *atunci pentru* $\forall \varepsilon > 0$ $(\exists)$ *o mulţime deschisă U şi o mulţime închisă F astfel încât* $F \subseteq E \subseteq U$ *şi* $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$.

Demonstraţie.

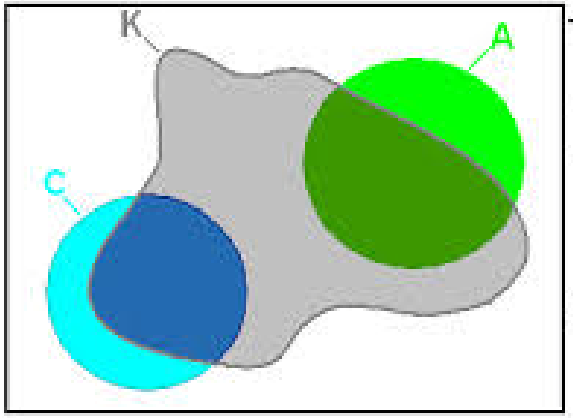
Cum μ este σ-finită există mulţimile distincte $E_K \in B_\sigma$ cu $\mu(E_K) < \infty$ astfel încât $E = \cup E_K$. Cum μ este regulară exterior există mulţimile deschise $U_K \supseteq E_K$ astfel încât $\mu(U_K \setminus E_K) < 2^{-k-1}\varepsilon$. Atunci $U = \cup U_K$ este deschisă, $U \supseteq E$ şi

$$\mu(U \setminus E) \leq \sum_k \mu(U_K \setminus E_K) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cum $E^C = R \setminus E$ este o mulţime Borel putem aplica acel aşi argument pentru E^C pentru a găsi o mulţime deschisă $V \supseteq E^C$ cu $\mu(V \setminus E^C) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Deci, $F = V^C$ este închisă, $F \subseteq E$ şi $\mu(E \setminus F) = \mu(V \setminus E^C) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. În concluzie,

$$\mu(U \setminus F) \leq \mu(U \setminus E) + \mu(E \setminus F) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} O_{\lambda_n}$$



* Los abiertos de K son los $A' = K \cap A$, con A un abierto de E

No son a priori abiertos de E

* Los cerrados de K son los $C' = K \cap C$, con C un cerrado de E

Son forzosamente cerrados de E

ENTORNOS EN LA RECTA

Dado un número real **a** y un número real positivo ε, se llama **entorno de centro a y radio** ε, y lo representamos por $E(a,\varepsilon)$, al intervalo abierto de extremos $a-\varepsilon$, $a+\varepsilon$

En notación matemática sería:

$E(a,\varepsilon)$

$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$

$\{x \in \mathbb{R} \setminus a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}$

CONCLUSIONES

1. Considerar limitadamente el concepto en cuestiones de velocidad, tangente, ya que puede llevar al fracaso cuando se pretendan justificar las bases del cálculo

2. Evitar la excesiva importancia al registro algebraico

3. Demasiado énfasis de los procesos algorítmicos

4. Necesidad de reestructuración y actualización del currículo

5. LA MAYOR PARTE

del estudio

histórico-epistemológico

no coincide con el currículo

YA AL TERMINAR

Cuando la cultura y la sociedad cambian de manera significativa, la educación también debe cambiar para seguir desarrollando su función Transmisora

(Hernández, 2009)

Referencias Bibliográficas

Blanco, L.J. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Revista Épsilon. N 25 (pp 49- 60).* Universidad de Sevilla.

Boyer, C. (1986). Historia de la Matemática. Editorial Alianza S.A., Madrid.

Cobos, J. (2000). *Francisco Vera Fernández de Córdoba. Tres obras inéditas. Badajoz, Servicio de* publicaciones Diputación de Badajoz.

Cornu, B. (1991). Apprentissage de la notion de limite: modéles spontanés et modéles propres. Proceedings PME-V. Grenoble. France. Vol. I, pp. 322-326.

Guzmán, M. (1992). *The origin and evolution of mathematical theories. Implications for mathematical education.* Selected lectures from the 7 th international congress on mathematical education. Canadá pp 147 – 155.

Marina, C. (1993), Topología General, Colección notas. Editorial Complutence, Madrid, España

Margare, J. (2010), Introducción a la Topología. Editorial Complutence, Madrid. España

Mellado, A. (2011), Análisis Matemático. Ediciones Universidad de Extremadura, Nueva Extremadura. España

Orellana, E. (2008) . Historia y Epistemología del Concepto Límite. Ediciones Universidad de Extremadura, España

Ríbnikov, K. (1987). Historia de las matemáticas. Editorial MIR, Moscú. Traducido del ruso por Concepción Valdés Castro.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. Educational Studies in Mathematics. Vol. 18, pp. 371-397.